یک مسئله و چند راه‌حل

حسین‌کریمی

جمع گاوسی!

مسئله: مطلوب است تعیین حاصل‌جمع زیر:

$$S = ۱+۲+\dots+(n-۱)+n = ?$$

روش اول؛ روش گاوس

در تاریخ ریاضیات آمده است که یک دانش‌آموز دبستانی به نام **کارل فریدریش گاوس**، برای تعیین حاصل‌جمع $S=۱+۲+\dots+۹۹+۱۰۰$، به‌صورت زیر عمل کرد:

$$S=۱+۲+\dots+۹۹+۱۰۰$$
$$S=۱۰۰+۹۹+\dots+۲+۱$$
$$۲S=۱۰۱+۱۰۱+\dots+۱۰۱+۱۰۱ \Rightarrow S=\frac{۱۰۰\times ۱۰۱}{۲}=۵۰۵۰$$

بدین‌ترتیب برای تعیین مجموع n عدد طبیعی، نخست داریم:

$$S=۱+۲+\dots+(n-۱)+n$$
$$S=n+(n-۱)+\dots+۲+۱$$
$$۲S=(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)+(n+۱) \Rightarrow S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

این روش را که به «روش گاوس» معروف است، **روش اول** می‌نامیم.

اکنون می‌خواهیم برای نشان دادن درستی تساوی $۱+۲+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ از روش‌های دیگر نیز استفاده کنیم و راه‌حل‌های متمایزی ارائه دهیم.

مثال: مجموع روبه‌رو را تعیین کنید:

$$S=۲۶+۲۷+\dots+۱۲۰+۱۲۱$$

الف)

$$S=(۱+۲+\dots+۱۲۰+۱۲۱)-(۱+۲+\dots+۲۴+۲۵)$$

$$S=\frac{۱۲۱\times ۱۲۲}{۲}-\frac{۲۵\times ۲۶}{۲}=۷۰۵۶$$

ب)

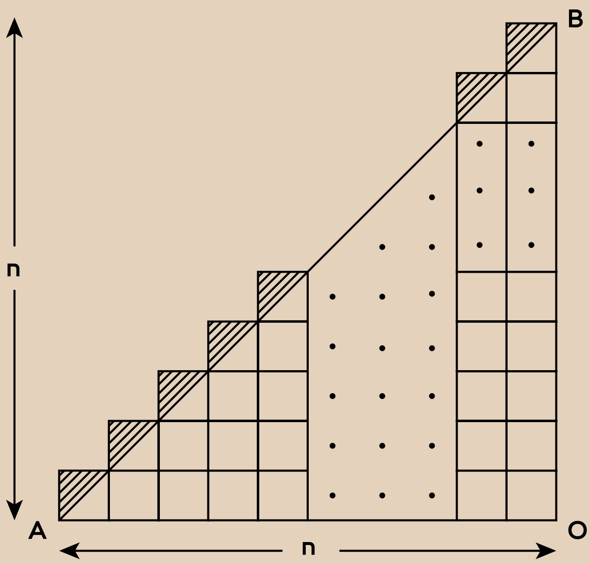
$$S=\frac{۲۶+۱۲۱}{۲}\times ۹۶=۷۰۵۶$$

یعنی مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از $a_۱$ و ختم به a_n عبارت است از: $S_n=\frac{(a_۱+a_n)}{۲}\times n$.

روش دوم؛ استفاده از مساحت

در ستون اول، یک مربع به ضلع واحد، در ستون دوم دو مربع، در ستون سوم سه مربع، ... و در ستون nام، n مربع به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم.

بدیهی است که سطح یک واحد مربع، نشان‌دهندهٔ یک مربع است. پس برای تعیین تعداد همهٔ مربع‌ها $(۱+۲+\dots+(n-۱)+n)$ کافی است به مساحت مثلث AOB، مساحت n مثلث هاشورخورده (هر کدام به مساحت $\frac{۱}{۲}$ واحد مربع) را اضافه کنیم:



$$S=\frac{n\times n}{۲}+\frac{n}{۲}=\frac{n^۲+n}{۲}=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

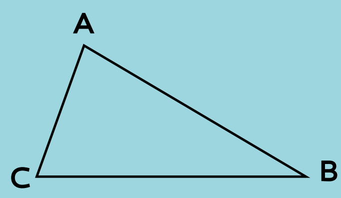
بنابراین مشاهده می‌کنیم:

$$۱+۲+\dots+(n-۱)+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

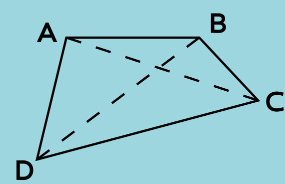
روش سوم: استفاده از پاره‌خط‌ها

می‌دانیم که تعداد پاره‌خط‌های واصل بین رأس‌های یک مثلث (سه‌ضلعی) سه پاره‌خط، بین رأس‌های یک چهارضلعی، شش پاره‌خط و بین رأس‌های یک پنج‌ضلعی، ده پاره‌خط است:

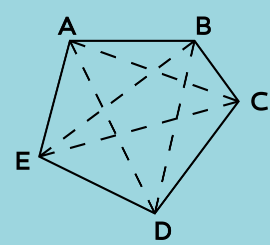
$AB, BC, CA \to ۱+۲=۳$



$AB, AC, AD, BC, BD, CD \to ۱+۲+۳=۶$



$AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE$
$\to ۱+۲+۳+۴=۱۰$



تمرین: با رسم یک شش‌ضلعی محدب، تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده بین رأس‌ها را مشخص کنید و نشان دهید:

$۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$

تذکر: با توجه به الگوی فوق می‌توان گفت: مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرها در $n+۱$ ضلعی محدب عبارت است از:

$۱+۲+۳...+n$ (۱)

در واقع در یک $n+۱$ ضلعی محدب، از هر رأس می‌توان به n رأس دیگر وصل کرد که همیشه ۲ پاره‌خط، ضلع محسوب می‌شوند و $n-۲$ پاره‌خط دیگر، قطر. اما می‌دانیم بین پاره‌خط AB و پاره‌خط BA تمایزی وجود ندارد. پس باید تعداد $n(n+۱)$ را نصف کنیم. بدین‌ترتیب تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در یک $n+۱$ ضلعی محدب (ضلع‌ها و قطرها) برابر است با:

$\frac{n(n+۱)}{۲}$ (۲)

حال با توجه به ۱ و ۲ داریم:

$۱+۲+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

روش چهارم: زیرمجموعه‌ها

می‌دانیم در یک مجموعهٔ n عضوی به‌تعداد ۲^n زیرمجموعه داریم:

مثلاً در مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با: $۲^۳=۸$ که عبارت‌اند از:

$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{c,a\}, \{c,b\}, \{a,b,c\}$

در مجموعهٔ A_{n+1}، تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی را با S_n نشان می‌دهیم. به مثال زیر توجه کنید:

$n=۱ \to A_۲=\{a,b\} \to S_۱=۱$

$n=۲ \to A_۳=\{a,b,c\} \to S_۲=۱+۲$

توجه داریم که زیرمجموعه‌های دو عضوی در $A_۳$ عبارت‌اند از:

$\{a,b\}, \{c,a\}, \{c,b\}$

$n=۳ \to A_۴=\{a,b,c,d\} \to S_۳=۱+۲+۳$

در مجموعهٔ چهار عضوی $A_۴$، شش زیرمجموعهٔ دو عضوی داریم که عبارت‌اند از:

$\{a,b\}, \{c,a\}, \{c,b\}, \{d,a\}, \{d,b\}, \{d,c\}$

$n=۴ \to A_۵=\{a,b,c,d,e\} \to S_۴=۱+۲+۳+۴$

تمرین: برای مجموعهٔ پنج‌عضوی $A_۵$ نشان دهید که تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی برابرند با:

$S_۴=۱+۲+۳+۴=۱۰$

تذکر: با توجه به الگوی فوق می‌توان گفت تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی در یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی برابر است با:

$۱+۲+۳...+n$ (۳)

در واقع در یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی، در تعیین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی، توجه داریم که برای انتخاب عضو نخست، $n+۱$ انتخاب و برای تعیین عنصر دوم، n انتخاب متمایز داریم. اما بین انتخاب $\{a,b\}$، $\{b,a\}$ وجه تمایزی قائل نیستیم. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی در یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی عبارت است از:

$\frac{n(n+۱)}{۲}$ (۴)

اکنون با توجه به ۳ و ۴ داریم: $S_n=۱+۲+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$